ＩＢ　解析特論（$Fourier$ 変換）　講義報告[3]

２００８年2月１6日（土）　１４：００−１６：００

前回は、サポート・コンパクトな無限回連続微分可能な複素数値関数の $Fourier$ 逆変換の存在を示した。この結果を基として、急減少関数全体 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 上の $Fourier$ 逆変換の存在を、「$Gau\beta$ の核による近似の補題」により示した。

前回、サポート・コンパクトな無限回連続微分可能な複素数値関数 f に対して、

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathfrak{F}(f)(y) \exp(\sqrt{-1}yx)dy$$

が成立することを示した。この結果から

$$\mathfrak{F}^{-1}(g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(y) \exp(\sqrt{-1}yx)dy \quad \text{for } \forall g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

とおいたとき、任意の $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して、$(\mathfrak{F}^{-1} \circ \mathfrak{F})(f) = f$ となることが予想できる。ところが、任意の $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して、

$$\begin{aligned} I(\mathfrak{F}(f))(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathfrak{F}(f)(y) \exp(\sqrt{-1}yx)dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(\xi) \exp(-\sqrt{-1}y\xi)d\xi \right) \exp(\sqrt{-1}yx)dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(\xi) \exp(-\sqrt{-1}y(\xi - x))d\xi dy \end{aligned}$$

とおいたとき、上式の最後の積分は絶対可積分にならない。そこで、「$Gau\beta$ の核」なる関数を導入する。

定義 1.2 ($Gau\beta$ の核). 任意の $\varepsilon > 0$ に対して、

$$G_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\varepsilon} \right) \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

なる型の関数を $Gau\beta$ **の核**という。

いま、

$$I_\varepsilon(\mathfrak{F}(f))(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathfrak{F}(f)(y) \exp(iyx - \varepsilon y^2)dy$$

とおくと、$I_\varepsilon(\mathfrak{F}(f))$ は

$$I_\varepsilon(\mathfrak{F}(f))(x) = \int_{\mathbb{R}} f(\xi) \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} \exp\left(-\frac{(\xi - x)^2}{4\varepsilon} \right) \right) d\xi = \int_{\mathbb{R}} f(\xi) G_\varepsilon(\xi - x) d\xi$$

という形に変形できる。また、$Lebesgue$ の優収束定理により、

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon(\mathfrak{F}(f))(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \lim_{\varepsilon\to 0}\bigl(\mathfrak{F}(f)(y) \exp(iyx - \varepsilon y^2)\bigr)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathfrak{F}(f)(y) \exp(iyx)dy = I(\mathfrak{F}(f))(x)$$

が成立する。

[3]数学工房　http://www.sugakukobo.com/

練習問題 1.2. $G_\varepsilon(x)$ を $Gau\beta$ の核とするとき、

1. $\mathfrak{F}(G_\varepsilon)(y) = \dfrac{1}{2\pi}\exp(-\varepsilon y^2)$
2. $G_\varepsilon > 0$ （正定値性）
3. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} G_\varepsilon(x)dx = 1$
4. $\forall\delta > 0 \quad \displaystyle\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{|x|>\delta} G_\varepsilon(x)dx = 0$

補題 1.6 (*$Gau\beta$* **の核による近似の補題**)**.** $f \in C_b(\mathbb{R}) \cap UC(\mathbb{R})$ に対して、

$$f_\varepsilon(x) = (f * G_\varepsilon)(x) = \frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_{\mathbb{R}} f(\xi)\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4\varepsilon}\right)$$

とおいたとき、$\|f - f_\varepsilon\| \to 0$ $(\varepsilon \downarrow 0)$ が成立する。

以上のことから、$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ならば、$f \in C_b(\mathbb{R}) \cap UC(\mathbb{R})$ となることに注意すれば、任意の $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して、

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \mathfrak{F}(f)(y)\exp(\sqrt{-1}yx)dy$$

が成立する。

記録　J.S